数理解析研究所講究録
873巻 1994年 45-54

弾性体の境界値逆問題に対する大域的一意性

城西大学理学部 中村 玄 (Gen Nakamura)

§1. 序及び結果

初めにここで紹介する結果は, Prof. Uhlmann (Univ. of Washington) との共同研究結果である事を断っておく。詳細は, [N-U 3] を参照されたい。このノートでは, 弾性体の材料特性 (i.e. 弾性テンソル) の同定方法として以下に述べる様な逆問題を考え, その一意性について論じる。この方法は, 同定に用いる観測データが実際的でないため余り実用的ではない。しかしより実際的な観測データを用いる場合の理論的なガイドラインを与えるものと思われる。

今 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ を滑らかな境界 $\partial\Omega$ をもつ等方線形弾性体とみなし, その Lamé 係数 $\lambda, \mu \in C^\infty(\overline{\Omega})$ は, 強凸性条件

(*), $\mu > 0$, $n\lambda + 2\mu > 0$ on $\overline{\Omega}$

をみたすとする。このとき与えられた境界変位 $f \in C^\infty(\partial\Omega)$ に対する弾性体 Ω の変形は, 変位ベクトル u に対する次の境界

値問題(BP)の解として与えられる。

$$(\mathrm{BP})\begin{cases} L_{\lambda,\mu}u \underset{\mathrm{def}}{=} \operatorname{div}\sigma(u)=0 & \text{in } \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega}=f \end{cases}$$

ここで

$\sigma(u) \underset{\mathrm{def}}{=} \lambda(\mathrm{trace}\,\varepsilon(u))\,I_n + 2\mu\,\varepsilon(u)$; 応力テンソル

$\varepsilon(u) \underset{\mathrm{def}}{=} 2^{-1}\{\nabla u + {}^t(\nabla u)\}$; (線形)ひずみテンソル

I_n ; n 次単位正方行列

である。なお(BP)は,唯一つの解 $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$ をもつ。

我々の逆問題の観測データである Dirichlet-Neumann 写像 $\Lambda_{\lambda,\mu}: C^\infty(\partial\Omega)\longrightarrow C^\infty(\partial\Omega)$ を次の様に定める。

Def. $\forall f\in C^\infty(\partial\Omega)$, $\Lambda_{\lambda,\mu}f \underset{\mathrm{def}}{=} \sigma(u)\nu\big|_{\partial\Omega}$

ここで u は f に対する(BP)の解, ν は $\partial\Omega$ の単位外法線ベクトル場である。

Remark. $\Lambda_{\lambda,\mu}f$ の物理的意味は,境界変位 f により生じる境界応力である。

さて次の逆問題を考える。

Inverse prob.

$$\Lambda : C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\overline{\Omega}) \ni (\lambda, \mu) \longmapsto \Lambda_{\lambda,\mu} \in \{\text{bounded linear map on } C^\infty(\partial\Omega)\}$$

に対して (i)(一意性)Λの単射性, (ii)(安定性)Λ^{-1}の連続性, (iii)(存在)Λの値域の特徴付け, (iv)(再構成)Λ^{-1}の構成法等について答えよ。

ここでは (i) について次の大域的一意性がなり立つ事を報告する。

Th. (大域的一意性) $n \geq 3$ のとき, Λは単射的である。即ち $(*)_1$ をみたす $\lambda_j, \mu_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ $(j=1,2)$ について

$$(*)_2 \quad \Lambda_{\lambda_1,\mu_1} = \Lambda_{\lambda_2,\mu_2}$$

がなり立てば, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\mu_1 = \mu_2$ in $\overline{\Omega}$ である。

Remark.

(i) ここで述べた逆問題と結果は, **[S-U]**の電気伝導係数の同定問題の類似物である。

(ii) もしもΛの単射性が $C^\infty(\overline{\Omega}) \times C^\infty(\overline{\Omega})$ のある一点の近傍でなり立つときは, 局所的一意性がなりたつという。

(iii) $n=2$ のときは, 局所的一意性が各 Lamé 定数 (i.e. Lamé 係数が定数値関数) のまわりでなり立つ。([N-U1] 参照の

事。)

§2. 定理の証明の概略

この節では，定理の証明の概略を紹介する。[S-U] では楕円型方程式に関する一意接続定理が用いられたのに対し，ここでの証明では狭義双曲型方程式の Cauchy 問題に対する一意性を用いる。そして複素平面波解の構成に当って，本質的に新しいテクニックが要求される。

今 $\lambda_j, \mu_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$ $(j=1,2)$ について $(*)_1$ と $(*)_2$ がみたされているとする。このとき [N-U2] により次の Fact 1 が分っている。

Fact 1. $\lambda_1-\lambda_2$, $\mu_1-\mu_2$ は $\partial\Omega$ で flat である。即ち

$$\forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (\lambda_1-\lambda_2) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (\mu_1-\mu_2) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

但し $x=(x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ は cartesian coordinate, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である。

従って $\lambda_1-\lambda_2$, $\mu_1-\mu_2 \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ としてよい。

また $\lambda_1-\lambda_2$, $\mu_1-\mu_2$ がみたす重要な関係式として，次の key identity がある。

Fact 2. (Key identity) $\forall u^{(j)} \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $L_j u^{(j)} = 0$ in Ω に対して

$$E(u^{(1)}, u^{(2)}) \underset{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \{(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathrm{div}\,u^{(1)}\,\overline{\mathrm{div}\,u^{(2)}} + 2(\mu_1-\mu_2)\,\varepsilon(u^{(1)})\cdot\overline{\varepsilon(u^{(2)})}\}\,dx = 0$$

但し $\varepsilon(u^{(1)})\cdot\overline{\varepsilon(u^{(2)})} \underset{\text{def}}{=} \mathrm{Trace}\,(\varepsilon(u^{(1)})\,\overline{\varepsilon(u^{(2)})})$, $L_j \underset{\text{def}}{=} L_{\lambda_j,\mu_j}$.

Remark.

(i) これは L_j の形式的自己共役性より従う $\Lambda_{\lambda_j,\mu_j}$ の自己共役性に注意して、$\int_{\Omega} (L_1 u^{(1)}\cdot\overline{u^{(2)}} - u^{(1)}\cdot\overline{L_2 u^{(2)}})\,dx = 0$ を部分積分することにより得られる。但し $L_1 u^{(1)}\cdot\overline{u^{(2)}} = \mathrm{trace}\{(L_1 u^{(1)})\,{}^t\overline{u^{(2)}}\}$ etc..

(ii) $E(u^{(1)}, u^{(2)})$ は、ひずみエネルギー（関数）に付随した sesquilinear form である。

Key identity 内の $u^{(1)}, u^{(2)}$ としては、次の Fact 3 に述べる様な複素平面波解をとる。

Fact 3. (複素平面波解 $u^{(j)}$) $\forall x^{(0)} \in \overline{\Omega}$, $\forall \omega^{(0)} \in S^{n-1}$ (原点中心の $n-1$ 次元単位球面) に対して、$\exists N \subset S^{n-1}$; $\omega^{(0)}$ の開近傍,
$\exists \zeta^{(j)} = \zeta^{(j)}(\rho\omega, r)$ $(j=1,2)$, $\exists v^{(j)}(x, x^{(0)}; \zeta^{(j)})$; C^{∞} in $x \in \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in \overline{\Omega}$,
$\exists \phi(x, x^{(0)}, \omega) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n \times \overline{\Omega} \times N)$ such that

$$\begin{cases} \zeta^{(1)} + \overline{\zeta^{(2)}} = i\rho\omega, \quad \zeta^{(j)}\cdot\zeta^{(j)} = 0, \quad |\zeta^{(j)}| \propto r \quad (\rho \in \mathbb{R},\ r \geq 1,\ \omega \in N;\ j=1,2) \\ u^{(j)} \underset{\text{def}}{=} e^{x\cdot\zeta^{(j)}} v^{(j)} \text{ は、} L_j u^{(j)} = 0 \text{ in } \Omega \text{ の解} \quad (j=1,2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathrm{supp}_x \phi \subset \bar{\Omega} \text{ であり，N 内の適当な moving frame で表わせば，} \\ \phi(x, x^{(0)}, \omega) \text{ は } \omega \in N \text{ に無関係。更に} \\ (*)_3 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{i\rho s} ds \int_{x\cdot\omega = s} \phi(x, x^{(0)}; \omega)\, dH_x = \lim_{r\to\infty} r^{-2} E(u^{(1)}, u^{(2)}) = 0 \\ \qquad\qquad (\rho \in \mathbb{R},\ x^{(0)} \in \bar{\Omega},\ \omega \in N)\text{。} \end{cases}$$

但し dH_x は，超曲面 $x\cdot\omega = s$ の標準的な surface measure である。

従って $(*)_3$ と Radon 変換の台定理（[H] p19, Lemma 2.11）より，

$(*)_4$ $\quad \phi(x, x^{(0)}, \omega^{(0)}) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n,\ x^{(0)} \in \bar{\Omega},\ \omega^{(0)} \in S^{n-1})$.

さて $(*)_4$ において適当な $u^{(j)}$ $(j=1,2)$ を何組かとって計算し，得られた $(*)_4$ を適当に組合せて新な関係式を作ると，各 j $(1 \le j \le n)$ に対して

$(*)_5$ $$\{(n-1)\partial_{x_j}^2 - (\Delta - \partial_{x_j}^2)\}(\lambda_1 - \lambda_2) + C_j(x, x^{(0)}) S^{(2)}_{j,k}(x, x^{(0)}, \partial_x)(\lambda_1 - \lambda_2) + S^{(1)}_j(x, x^{(0)}, \partial_x)(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \quad \text{in } \bar{\Omega}.$$

但し

$C_j(x, x^{(0)}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega})$; $C_j(x^{(0)}, x^{(0)}) = 0$, $\forall \varepsilon > 0, \exists r(\varepsilon) > 0$, $|C(x, x^{(0)})| < \varepsilon$ $\quad (x^{(0)} \in \bar{\Omega},\ |x - x^{(0)}| \le r(\varepsilon))$

$S^{(2)}_{j,k}(x, x^{(0)}, \partial_x)$; $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega})$ 係数の２階斉次線形偏微分作用素

$S^{(1)}_j(x, x^{(0)}, \partial_x)$; $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \bar{\Omega})$ 係数の１階線形偏微分作用素。

そして $\mu_1 - \mu_2$ についても同様な関係式 $(*)_6$ が得られる。ここで十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $(*)_5$, $(*)_6$ は，$|x - x^{(0)}| \le r(\varepsilon)$ におい

x_{y} 方向に狭義双曲型である事に注意。

そこで良く知られた狭義双曲型方程式の Cauchy 問題に対する一意性定理を思い出すと、$\lambda_1-\lambda_2$, $\mu_1-\mu_2$ が $\partial\Omega$ で flat なことより，$\lambda_1-\lambda_2=\mu_1-\mu_2=0$ in $\overline{\Omega}$ となって証明が終る。

§3. Fact 3 について

この節では以上の議論で本質的な役割を果たした複素平面波解の構成法について概説する。

以下 $L=L_{\lambda,\mu}$ とおき，L は $(*)_1$ を保って $B^\infty(\mathbb{R}^n) \overset{\text{def}}{=} \{$有界な $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 関数で，全ての導関数が有界なもの$\}$ 係数の線形偏微分作用素となる様に $\mathbb{R}^n$ 全体に拡張しておく。

今関数 $\alpha \in B^\infty(\mathbb{R}^n)$ を適当にとると，

$$M \underset{\text{def}}{=} \{\mu(\lambda+2\mu)\}^{-1} LP = \Delta^2 I_n + M_h^{(1)}(x,D)\Delta I_n + M^{(2)}(x,D)$$

となる。但し

$$P w \underset{\text{def}}{=} -(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, w + (\lambda+2\mu)\Delta w + (\nabla\cdot w)\alpha,$$

$M_h^{(1)}(x,D)$; $B^\infty(\mathbb{R}^n)$ 係数の1階斉次線形偏微分作用素，

$M^{(2)}(x,D)$; $B^\infty(\mathbb{R}^n)$ 係数の2階線形偏微分作用素。

更に $\zeta\in\mathbb{C}^n$, $\zeta\cdot\zeta=0$, $|\zeta|\geq 1$ に対して

$M_\zeta \cdot \overset{\text{def}}{=} e^{-x\cdot\zeta} M(e^{x\cdot\zeta}\,\cdot)$, $\widetilde{M}_\zeta \overset{\text{def}}{=} M_\zeta \Lambda_\zeta^{-2}$ と定める。但し

$s \in \mathbb{R}$ に対して Λ_ζ^s は，主シンボル $\sigma(\Lambda_\zeta^s)=(|\xi|^2+|\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}$ をもつ properly supported な擬微分作用素である。このとき関係式 $W = {}^t(w, \tilde{\Delta}_\zeta w)$（縦ベクトル）を媒介にして，

$$\widehat{M}_\zeta w = 0 \iff N_\zeta W = 0$$

である。但し

$$\tilde{\Delta}_\zeta \underset{\text{def.}}{=} \Delta_\zeta \Lambda_\zeta^{-1}, \quad \Delta_\zeta \cdot = e^{-x\cdot\zeta}\Delta(e^{x\cdot\zeta}\cdot),$$

$$N_\zeta \underset{\text{def.}}{=} \hat{\tilde{\Delta}}_\zeta I_{2n} + N_\zeta^{(0)}(x, D)$$

$N_\zeta^{(0)}(x,D) \in L^0_{1,0}(\mathbb{R}^n, \{\zeta \in \mathbb{C}^n ; |\zeta| \geq 1\})$（注：この擬微分作用素のクラスについては，[S], §9 を参照の事。）

N_ζ は更に簡単な作用素に還元できる。即ち次の Fact 4 がなりたつ。

Fact 4. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists A_\zeta, \exists B_\zeta \in L^0_{1,0}(\mathbb{R}^n, \{\zeta \in \mathbb{C}^n ; |\zeta| \geq 1\})$ such that $\forall \varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \exists \varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $(j=2,3,4)$,

$$\varphi_1 N_\zeta A_\zeta = \varphi_1 B_\zeta \varphi_2 \Lambda_\zeta^{-1}(\Delta_\zeta I_{2n} + \varphi_3 R^{(-N)} \varphi_4)$$

where $R^{(-N)} : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow H^{s+N}(\mathbb{R}^n)$ bounded linear, $\|R^{(-N)}\|_{s,s+N} \leq C_s |\zeta|^{-N}$ $(|\zeta| \geq 1)$ for $\forall s \in \mathbb{R}$.

なお A_ζ, B_ζ は $|\zeta|$ が十分大きいとき，準大域的に可逆であることも分る。

従って粗く言えば，$M_\zeta v = 0$ の解は，$(\Delta_\zeta I_{2n})V = 0$ の解により生成されている。これより複素平面波解の構成法が，ある程度推察出来よう。

最後にここで紹介した Fact 3 の証明方法は，他の偏微分作用素に対して考えた境界値逆問題の一意性の証明にも有効に用いる事が出来る事を指摘しておく。

References

[H] S. Helgason

The Radon Transform, Birkhauser (1980).

[N-U 1] G. Nakamura and G. Uhlmann

A uniqueness for identifying Lame moduli by Dirichlet to Neumann map, American J. of Math., 115 (1993) 1161-1187.

[N-U 2] G. Nakamura and G. Uhlmann

Inverse boundary value problem at the boundary for elastic medium (to appear in SIAM J. Math. Anal.)

[N-U 3] G. Nakamura and G. Uhlmann

Global uniqueness for inverse boundary value problems for elasticity (to appear in Inventione Mathematiche)

[S] M.A. Shubin

Pseudodifferential Operators and Spectral Theory, Springe Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag (1987).

[S-U] J. Sylvester and G. Uhlmann

A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem, Annals of Math. 125 (1987) 153-169.